◆◆平成 25 年度数学　問題 1.(3)◆◆

0 または 1 の値をとりうる確率変数X_i, X_j $\left(1 \le i \le r、1 \le j \le r、i \ne j\right)$の結合確率分布が、

$$P\left(X_i = 1, X_j = 1\right) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$$

$$P\left(X_i = 1, X_j = 0\right) = P\left(X_i = 0, X_j = 1\right) = \frac{n(N-n)}{N(N-1)}$$

$$P\left(X_i = 0, X_j = 0\right) = \frac{(N-n)(N-n-1)}{N(N-1)}$$

であるとき、確率変数$X_1 + X_2 + \cdots + X_r$の平均は$\dfrac{\boxed{①}}{\boxed{②}}$であり、分散は$\dfrac{\boxed{③}}{\boxed{④}}$である。

ただし、N, n, rは整数であり、$1 < n < N-1$、$1 < r < N$とする。

◆◆簡単解説◆◆

まず、X_iの確率密度を求めてみましょう。($P(X_i = 0)$は求めなくても大丈夫です。)

$$P(X_i = 1) = P\left(X_i = 1, X_j = 1\right) + P\left(X_i = 1, X_j = 0\right) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{n(N-n)}{N(N-1)} = \frac{n}{N}$$

$$E(X_i) = 1 \cdot P(X_i = 1) = \frac{n}{N}$$

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_r) = rE(X_i) = \frac{nr}{N}$$

$$E\left({X_i}^2\right) = 1^2 \cdot P(X_i = 1) = \frac{n}{N}$$

$$V(X_i) = E\left({X_i}^2\right) - E(X_i)^2 = \frac{n}{N} - \left(\frac{n}{N}\right)^2 = \frac{n(N-n)}{N^2}$$

$$E\left(X_i \cdot X_j\right) = 1 \cdot 1 \cdot P\left(X_i = 1, X_j = 1\right) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$$

$$C\left(X_i \cdot X_j\right) = E\left(X_i \cdot X_j\right) - E(X_i)E\left(X_j\right) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} - \left(\frac{n}{N}\right)^2 = -\frac{n(N-n)}{N^2(N-1)}$$

$$V(X_1+X_2+\cdots+X_r)=rV(X_i)+2\cdot\binom{r}{2}\cdot C\left(X_i\cdot X_j\right)$$

$$=r\cdot\frac{n(N-n)}{N^2}+2\cdot\frac{r(r-1)}{2}\cdot\left\{-\frac{n(N-n)}{N^2(N-1)}\right\}=\frac{rn(N-n)(N-r)}{N^2(N-1)}$$

（注） 当解説は筆者の個人的な考えであり、当解説に対して一切に責任を負うものではありません。